3. Espaços topológicos

3.1. Definição. Seja X um conjunto. Chamaremos de *topologia* em X uma família τ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:
(a) $\emptyset$ e X pertencem a τ.
(b) A união de uma família arbitrária de membros de τ pertence a τ.
(c) A interseção de uma família finita de membros de τ pertence a τ.
Os membros de τ são chamados de *abertos*. O par (X, τ) é chamado de *espaço topológico*. Com freqüência diremos que X é um espaço topológico.

3.2. Exemplos.
(a) Se (X, d) é um espaço métrico, então segue da Proposição 2.6 que os abertos de (X, d) formam uma topologia τ_d em X.

(b) Se $X = \mathbf{R}^n$, então a topologia τ_d dada pela métrica euclideana

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

é chamada de *topologia usual*.

(c) Seja X um conjunto qualquer, e seja τ a família de todos os subconjuntos de X. Claramente τ é uma topologia em X, chamada de *topologia discreta*.

(d) Seja X um conjunto qualquer, e seja $\tau = \{\emptyset, X\}$. Claramente τ é uma topologia em X, chamada de *topologia trivial*.

3.3. Definição. Diremos que um espaço topológico (X, τ) é *metrizável* se existir uma métrica d em X tal que $\tau = \tau_d$.

Notemos que a topologia discreta é sempre metrizável, e vem dada pela métrica discreta.

3.4. Definição. Dadas duas topologias τ_1 e τ_2 num conjunto X, diremos que τ_1 é *mais fraca* que τ_2, ou que τ_2 é *mais forte* que τ_1, ou que τ_2 é *mais fina* que τ_1 se $\tau_1 \subset \tau_2$.

A topologia trivial em X é mais fraca que qualquer outra topologia em X. A topologia discreta em X é mais fina que qualquer outra topologia em X.

3.5. Definição. Seja X um espaço topológico. Diremos que um conjunto $F \subset X$ é *fechado* se $X \setminus F$ é aberto.

3.6. Proposição. *Seja X um espaço topológico. Então:*
(a) X e $\emptyset$ são fechados.
(b) A interseção de uma família arbitrária de fechados é um fechado.
(c) A união de uma família finita de fechados é um fechado.

Demonstração. Basta aplicar as leis de de Morgan.

Reciprocamente temos:

3.7. Proposição. *Seja X um conjunto, e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*
(a) X e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{F}$.
(b) A interseção de uma família arbitrária de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.
(c) A união de uma família finita de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.
Seja $\tau = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$. Então τ é uma topologia em X, e $\mathcal{F}$ coincide com a família dos fechados de (X, τ).

Demonstração. Basta aplicar as leis de De Morgan.

Exercícios

3.A. Prove que as métricas dos Exemplos 2.2(b), 2.2(c) e 2.2(d) definem a mesma topologia em $\mathbf{R}^n$.

3.B. Seja $X = \{a, b\}$, com $a \neq b$, e seja

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}.$$

Prove que τ é uma topologia em X. O espaço (X, τ) é chamado de *espaço de Sierpinski*.

3.C. Seja X um conjunto, e seja

$$\mathcal{F} = \{X\} \cup \{F \subset X : F \quad \text{é finito}\}.$$

Prove que $\mathcal{F}$ é a família de fechados de uma topologia em X, conhecida como *topologia cofinita*. Você reconhece esta topologia quando X é finito?

3.D. Seja X um conjunto, e seja

$$\mathcal{F} = \{X\} \cup \{F \subset X : F \quad \text{é enumerável}\}.$$

Prove que $\mathcal{F}$ é a família de fechados de uma topologia em X, conhecida como *topologia coenumerável*. Você reconhece esta topologia quando X é enumerável?

3.E. Seja X um conjunto, seja $A \subset X$, e seja

$$\tau_A = \{\emptyset\} \cup \{U : A \subset U \subset X\}.$$

(a) Prove que τ_A é uma topologia em X.
(b) Descreva os fechados de (X, τ_A).
(c) Você reconhece τ_A quando $A = \emptyset$ e quando $A = X$?